C :"choisir le dé parfait et obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4 ".

a- Calculer la probabilité de l'événement B.

b- Calculer la probabilité de l'événement C.

c- En déduire la probabilité de l'événement A.

PROBLEME (10 points)

A-1) Soit la fonction φ définie sur IR par $\varphi(x) = e^x(2-x) - 2$

a- Etudier les variations de φ.

b- Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet dans IR exactement deux solutions. On notera a la solution non nulle et on vérifiera que $1<a<2$.

c- En déduire le signe de $\varphi(x)$.

2) Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a- Montrer que f est continue sur IR.

b- Monter que f est dérivable sur IR et que :Pour tout $x \in IR^*$ on a :

$$f'(x) = \frac{x\varphi(x)}{(e^x - 1)^2}.$$

c- Montrer que $f(a) = a(2-a)$.

d- Etudier les variations de f, puis construire la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

(pour la construction on prendra $a = 1,6$).

3) On considère la fonction F définie sur IR^+ par : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

a- Justifier l'existence de F(x) pour tout réel positif x.

b- Montrer que F est continue et strictement croissante sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$.

c- Donner la forme de l'intervalle F(I).

4) On considère la fonction G définie sur IR^+ par : $G(x) = \int_{Log2}^x t^2e^{-t}dt$

a- Justifier l'existence de G(x) pour tout réel positif x.

b- A l'aide de deux intégrations par parties, calculer G(x) puis montrer que G admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera.

c- Montrer que : Pour tout $t \in [Log2, +\infty[$ on a $f(t) \leq 2t^2e^{-t}$.
et en déduire qu'il existe un réel positif M tel que: $\forall x \in IR^+; F(x) \leq M$

d- En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) \leq M$.

(Dans la suite du problème on posera $L = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$).